Poisson方程式の数値計算 (近似計算とシミュレーションによる近似解法研究会報告集)

角谷, 保

数理解析研究所講究録
51巻 1968年 37-44

Poisson方程式の数値計算

日本ビジネス・オートメーション(株) 角谷 保

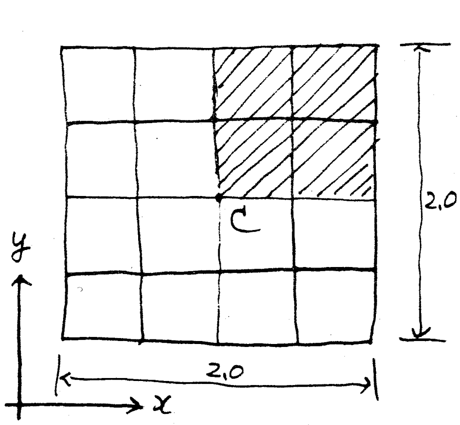
§1. まえがき

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.0$$

について，Gauss－Seidel法により数値計算を行い，分割格子数M，収斂判定常数E，収斂までの繰返し演算回数K，およびそれ等と，演算桁数，境界条件の差異，初期値の与え方の差異等との関係を調べてみた。

尚，領域は右図のような，2辺がx，y軸に並行な，辺長2.0の正方形で，対称性から，実際の数値計算は斜線部分で行った。



尚，分割数Mは2進分割とし，演算桁は原則として11桁である。

§2、主な数値実験とその結果

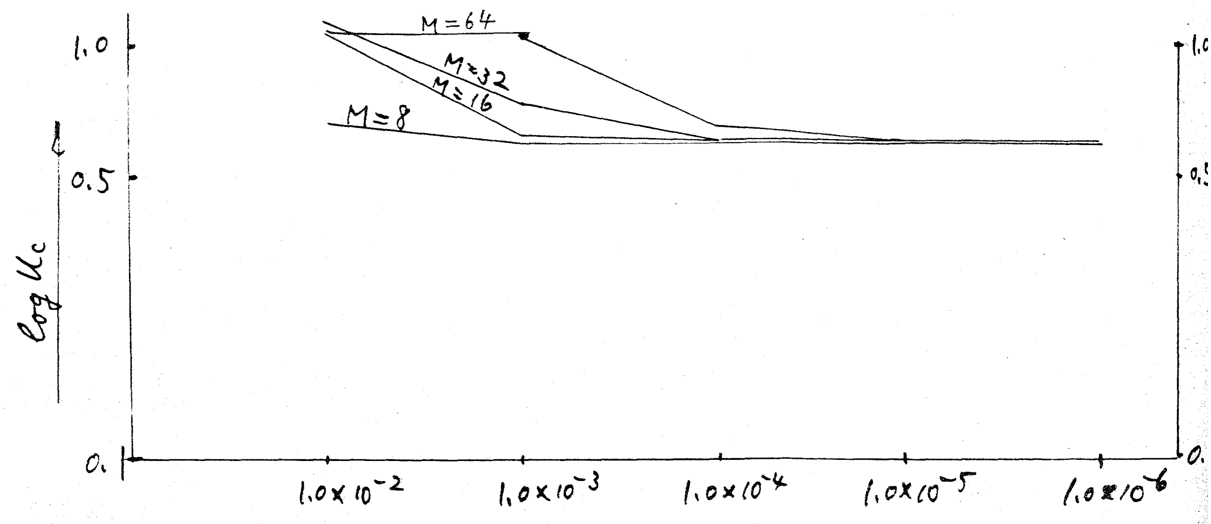
2－1、解に及ぼすMとEの影響と真値との関係

今，初期値＝1.0，境界値＝0.0，E＝1.0×10^{-2}～1.0×10^{-6}，M＝8～64とすると，中央C点での函数値u_cは表－1及び図－1のように収斂してゆく。今，E＝1.0×10^{-4}～10^{-6}

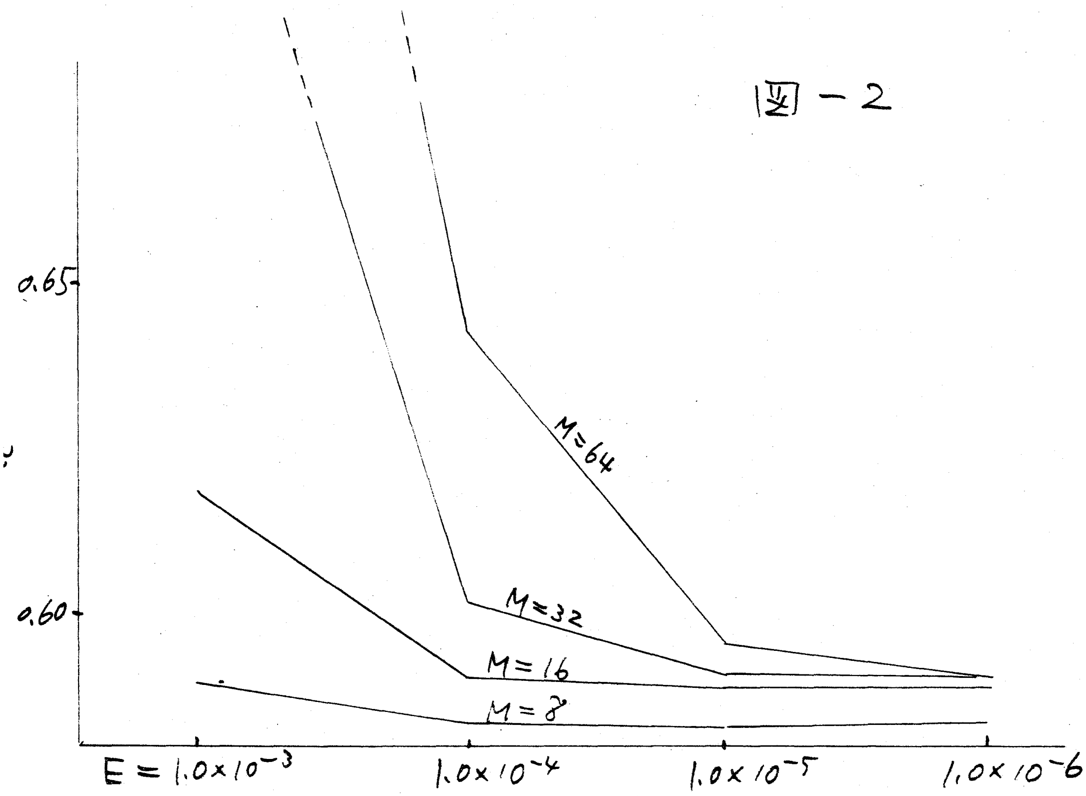
表－1

	u_c				
M \ E	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}
8	0.66205	0.58968	0.58295	0.58233	0.58227
16	1.02243	0.61900	0.59057	0.58786	0.58760
32	1.10399	0.74249	0.60135	0.59014	0.58904
64	1.03955	1.08500	0.64254	0.59419	0.58975

図－1



の部分を拡大すると，図－2のようになり，Mの値による夫々のU_cの収斂値は異るようである。いま，このMによるU_cの

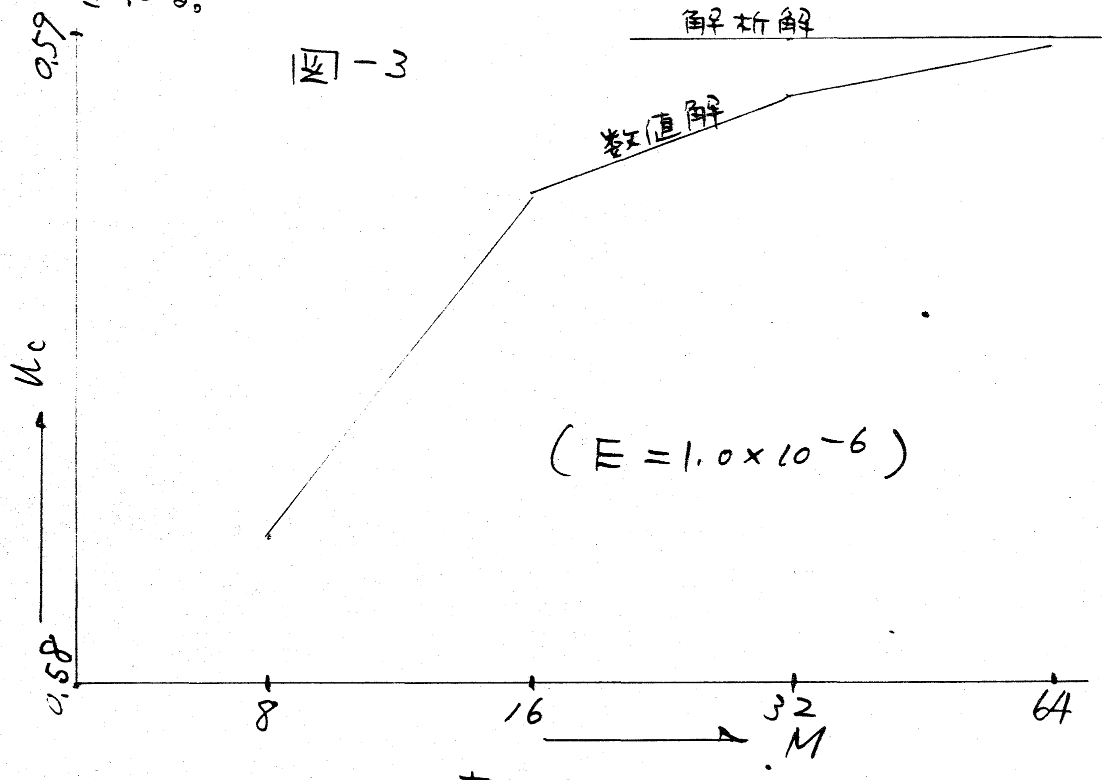


図－2

収斂値が，図－3のようにU_c－M図を考えると，真の値（これは解析解により$U_c=0.589371$と求められている）へMの増大につれて近づいているように見える。若しこれが真ならば，解析解によらずに或程度迄推定しえよう。

今，念の為，演算桁数を8桁に下げて11桁の分と比べてみたが，このMに関係するU_cの収斂値は，この程度では，表－2に示すように，解や演算回数に殆ど影響しないことが示

される。



表－2

E	8桁 k	8桁 u_c	11桁 k	11桁 u_c
1.0×10^{-2}	39	1.022430	39	1.022431
1.0×10^{-3}	177	0.619004	177	0.619005
1.0×10^{-4}	298	0.590571	298	0.590571
1.0×10^{-5}	417	0.587865	417	0.587865
1.0×10^{-6}	536	0.587596	536	0.587596

2－2．Eとkとの関係

今、初期値1.0，境界値0．0としてEとkとの関係を調べ

ると表－3のようになる。表－3から，イ)精度を10倍ずつ上

表－3　Kの値，( )内はΔK

E ＼ M	8	16	32	64
1.0×10^{-6}	150	536	1,860	6,295
	(29)	(119)	(477)	(1,917)
1.0×10^{-5}	121	417	1,383	4,378
	(29)	(119)	(481)	(1,975)
1.0×10^{-4}	92	298	902	2,403
	(30)	(121)	(521)	(1,950)
1.0×10^{-3}	62	177	381	453
	(30)	(138)	(319)	(471)
1.0×10^{-2}	32	39	62	82
$(\overline{\Delta M})$	(→30)	(→120)	(→480)	(→1,920)

げると，Mは等差数列的に変化する。ロ) Eが小さくなるにつれて，ΔMは分割数の平方に比例してくる。等がわかる。いま，一様乱数を格子番号に対応させて，考えている点をランダムにえらばせてみると，表－4を得る。この表から，一

表－4　Kの値 (M=16)

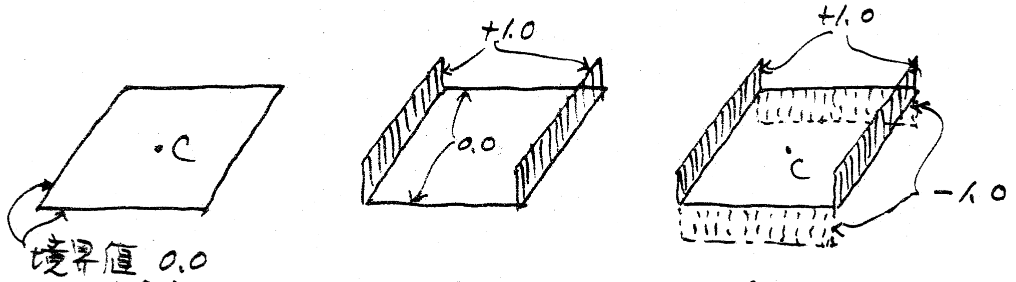
E	一様乱数使用	普通のG.S.法	比
1.0×10^{-3}	21,928	$177\times\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 11,328$ 換算	1.93
	(ΔK=8,254)		
1.0×10^{-4}	30,182	$298\times(〃) = 19,072$	1.58
	(ΔK=8,642)		
1.0×10^{-5}	38,824	$417\times(〃) = 26,688$	1.45

般に，このような場合は，乱数などを使わない方が繰返回数が少ないようであるが，その比は，Eが小さくなるにつれて漸減の傾向にある。

2−3　境界条件を変えてみた場合について。

いま，図−4のようにA，B，C3つのパターンの境界条件

図−4　境界値の設定



(A)　　(B)　　(C)

を考える。前と同じく初期値1.0とし，$M=32$ とすると，表−5を得る。表−5から，イ）境界条件が複雑であっても

表−5　Kの値

E	A		B		C	
	K	ΔK	K	ΔK	K	ΔK
1.0×10^{-6}	1,860		1,354		2,804	
		477		478		476
1.0×10^{-5}	1,383		876		2,328	
		481		482		474
1.0×10^{-4}	902		394		1,854	
		521		255		442
1.0×10^{-3}	381		139		1,412	
		319		102		655
1.0×10^{-2}	62		37		757	

，Kは却って減ることがある。（AとB），ロ）境界条件の如何に拘らず，Eが小さくなればΔKは一定値に近付くように思われる，等が読取れる。

2−4. 初期設定値を変化させた場合。

いま，$E=1.0\times10^{-4}$，$M=32$，境界値＝0.0 として，初期値を一様に＋2.0から−0.6まで，0.2刻みに変化させてみると，表−6のようになり，これを図示すると，図−5のようになる。

表−6 Kの値

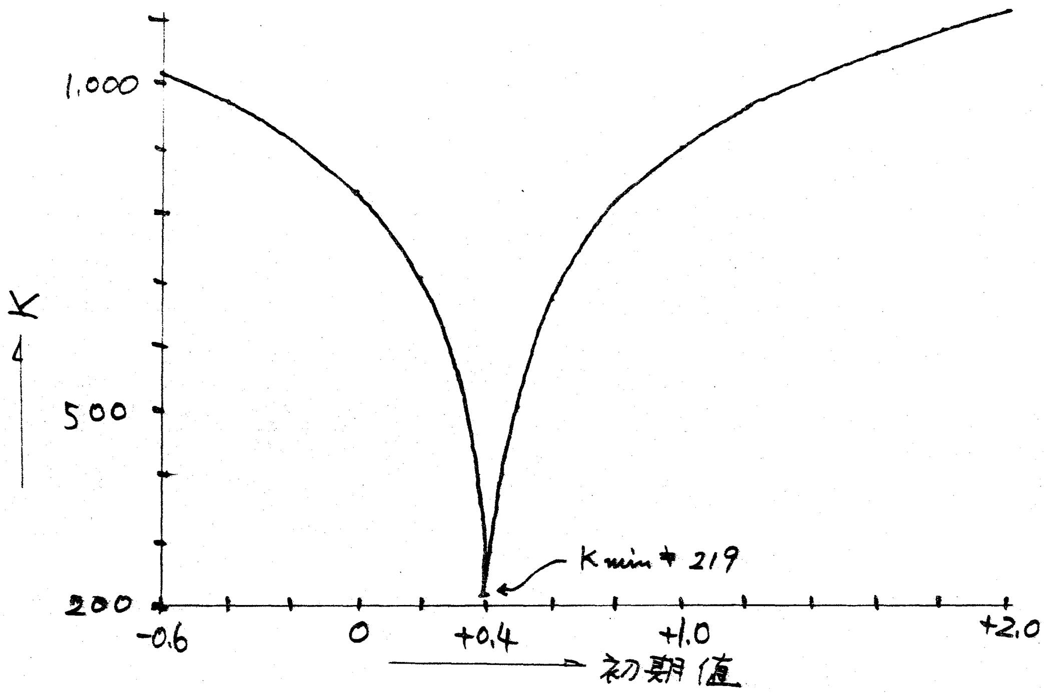
	K	ΔK		K	ΔK
					146
+2.0	1,106		+0.6	672	
		28			453
1.8	1,078		0.4	$K_{min}\fallingdotseq 219$	
		32			−472
1.6	1,046		+0.2	691	
		37			−140
1.4	1,009		0.0	831	
		47			−83
1.2	962		−0.2	914	
		60			−57
1.0	902		0.4	973	
		84			−46
+0.8	818		−0.6	1,019	
		146			

図−5からわかることは イ）初期値をうまくとることによって，くり返し回数Kが非常に違ってくる。ロ）初期値に対するKの値は，K_{min} に対して大体対称のようである。等であろう。

§3、あとがき

以上，Poisson方程式の一例について，若干の計算

図－5



例を示したが，以上の外に色々の組合せ（例えば，原式の右辺常数項を変えてみる等）を行うこと等によって，又，種々の事実が明かにされるかもしれない。

以上